



TITLE:

## 5. Wilsonの相転移論(モレキュール型研究計画「超伝導ゆらぎと1,2次元の超伝導体の理論」報告,基研研究会報告)

AUTHOR(S):

真木, 和美

---

CITATION:

真木, 和美. 5. Wilsonの相転移論(モレキュール型研究計画「超伝導ゆらぎと1,2次元の超伝導体の理論」報告,基研研究会報告). 物性研究 1972, 18(3): C9-C15

ISSUE DATE:

1972-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/88469>

RIGHT:

Sn の微粒子の帯磁率を低温で測定した。得られた結果は以下のである。

- 1) 直径  $800 \text{ \AA} \sim 200 \text{ \AA}$  の粒子の帯磁率はその大きさ及び温度依存性が BCS 理論でよく説明される。
- 2) 直径  $800 \text{ \AA} \sim 100 \text{ \AA}$  では、転移温度の変化はほとんどない。
- 3) 直径  $800 \text{ \AA} \sim 200 \text{ \AA}$  では、 $T_c (3.72^\circ\text{K})$  の上  $4.0^\circ\text{K}$  あたりまで  $T=0$  の帯磁率の  $\frac{1}{10}$  程度の小さな尾がみられる。
- 4) 直径  $100 \text{ \AA}$  程度の粒子では温度変化が、 $T_c$  近傍  $0.3^\circ\text{K}$  程度の中で終了する階段状の変化を示す。

3) については高山の理論で予想されるゆらぎからくる帯磁率に比べてかなり小さい。4) については、ii) の効果がでていのではないかと思われるがさらにくわしい研究が必要である。又、2) については Parameuter の理論に合わない。

## 5. Wilson の相転移論

東北大理 真 木 和 美

最近話題になっている Wilson の相転移論<sup>1-3)</sup> について述べる。

- 1) Kadanoff-Widom の scaling 論のクリコミ群による定式化

Wilson は Kadanoff-Widom の scaling theory はクリコミ群の考えを用いると自然に定式化できることを示す。先ずモデルとして Kadanoff と同様 Ising スピン系を考える。

$$H = J \sum_{\delta} \sum_i S_i S_{i+\delta} + H \sum_i S_{iz} \quad (1)$$

$$K = J/T, \quad H' = H/T$$

とおく、今上の系の単位体積あたりの自由エネルギーを  $F(K, H)$  と書く。次に一辺  $L$  の長さの立方体細胞をとって、各立体胞に  $S_L$  の有効スピンのあると

すると、この

系の単位体積

あたりの自由

エネルギーは

$F = F(K_L, H_L)$

と書くことが

できる。

今系のコヒーレンスの長さ  $\xi$  が十分大きいとすれば上の二つの系は

$$\left\{ \begin{array}{l} F(K, H) = L^{-3} F(K_L, H_L) \\ \xi(K, H) = L \xi(K_L, H_L) \end{array} \right. \quad (2)$$

の関係で結ばれる。上の関係式を  $L$  で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_L}{\partial L} &= \frac{1}{L} u(K_L, H_L^2) \\ \frac{\partial H_L}{\partial L} &= \frac{1}{L} H_L v(K_L, H_L^2) \end{aligned} \quad (3)$$

の関係式が得られる。特に臨界点 ( $K = K_c$ ) で  $\xi = \infty$  を考慮すると

$$\xi(K_c, 0) = 0$$

このことから  $K = K_c \Leftrightarrow K_L = K_c$

$$\text{即ち } \left. \frac{\partial K_L}{\partial L} \right|_{K=K_c} = 0, \quad u(K_c, 0) = 0 \quad (4)$$

が得られる。今  $u(K_L, H_L^2)$  及び  $v(K_L, H_L^2)$  が臨界点の近くで regular だと仮定すれば、臨界点の近くでは(3)式は

$$\frac{\partial K_L}{\partial L} = \frac{1}{L} (K_L - K_c) y$$

$$\frac{\partial H_L}{\partial L} = -\frac{1}{L} H_L x$$

$$y = \frac{\partial}{\partial K_L} u(K_L, 0) \Big|_{K_L=K_c}, \quad x = v(K_c, 0) \quad (5)$$

が得られる。(5)式を積分すると

$$(K_L - K_c) = C_1 (L)^y \quad (6)$$

$$H_L = C_2 (L)^x$$

Kadanoff の scaling law が得られる

## 2) 固定点理論

話をもう少し一般にするのに次のようなモデル・ルミルトニアンを考える。

$$H = \sum_i J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+\delta} + H \sum_i \vec{S}_i - \alpha \sum_i \vec{S}_i^2 - \beta \sum_i (\vec{S}_i)^4$$

あるいは  $i$  を連続変数と考えて

$$= \int \left\{ \frac{1}{2} r_0 |\vec{S}(x)|^2 + \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \vec{S}(x)|^2 + \frac{1}{4} u_0 |\vec{S}(x)|^4 \right\} dx$$

$$(|\vec{S}(x)|^4 = (|\vec{S}(x)|^2)^2) \quad (7)$$

を考える。上のモデルは特別の場合として Ising スピン及び Gaussian モデルを含んでいる。こゝで“臨界指数は系の

1) 次元  $d$

2) 対称性  $\longleftrightarrow$  自由度 ( $n$ )

の普遍関数である”という基本仮定をおく。例えばスピン系と他の系との対応は

$$\text{spin 系} \begin{cases} (n=3) \text{ isotropic} \\ (n=2) \text{ planer} \longleftrightarrow X-Y \text{ model} \longleftrightarrow \text{superfluid} \\ (n=1) \text{ axial} \longleftrightarrow \text{Ising model} \end{cases}$$

のように考えられる。

前節での(3)の関係をもう一つのパラメーター  $q_L$  を含む系に拡張してみると

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_L}{\partial L} &= \frac{1}{L} u(K_L, q_L, H_L^2) \\ \frac{\partial q_L}{\partial L} &= \frac{1}{L} w(K_L, q_L, H_L^2) \\ \frac{\partial H_L}{\partial L} &= \frac{1}{L} H_L^v(K_L, q_L, H_L^2)\end{aligned}\quad (8)$$

のようになる。今臨界点で  $\xi(K_L, q_L, 0) = \infty$  ( $\Rightarrow K_c = K_c(q_L)$ ) になることを考慮すると、臨界点近傍では

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_L}{\partial L} &= \frac{1}{L} (K_L - H_c) y_{11} + \frac{1}{L} (q_L - q_c) y_{12} \\ \frac{\partial q_L}{\partial L} &= \frac{1}{L} (K_L - H_c) y_{21} + \frac{1}{L} (q_L - q_c) y_{22}\end{aligned}\quad (9)$$

この式を解くと

$$(K_L - K_c) = a(L) y_1 + b(L) y_2$$

$$(q_L - q_c) = a'(L) y_1 + b'(L) y_2$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (y_{11} + y_{22} \pm \sqrt{(y_{11} - y_{22})^2 + 4 y_{12} y_{21}}) \quad (10)$$

今  $L$  とともに  $K_L \rightarrow K_c$  になるためには  $y_1, y_2$  のいずれかが負でなければならない。  $y_1 < 0$  とすると上の条件から  $b = b' = 0$  となる。これを固定点の仮定という。この様子を図示すると次頁の図のように  $(K_c, q_c)$  は鞍点になっていることを意味している。

## 3) 摂動計算による考察

今ハミルトニアン(7)を用いて  
自由プロパゲータ  $g_0^{-1}(k) =$   
( $r_0 + k^2$ ) ( $r_0 \rightarrow 0, T \rightarrow T_c$ ) について  
self-energy 補正を摂動で計算すると

$$\phi = \text{bubble diagram} = \text{self-energy diagram 1} + \text{self-energy diagram 2}$$

$$= 2(n+2)u_0 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(r_0 + k^2)}$$

$$= 2(n+2)u_0 \int_0^\infty ds \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k e^{-s(r_0 + k^2)}$$

$$= \frac{2(n+2)u_0}{(4\pi)^{d/2}} r_0^{\frac{d}{2}-1} \Gamma(1 - \frac{d}{2}) = \frac{2(n+2)u_0}{(4\pi)^{d/2}} r_0 (r_0^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(-\frac{\epsilon}{2} - 1))$$

$$\epsilon = d - 4$$

(11)

あるいは

$$r = r_0 \left[ 1 + \frac{2(n+2)u_0}{(4\pi)^2} \left( \frac{r_0}{4\pi} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(-\frac{\epsilon}{2} - 1) \right]$$

(12)

したがって  $\epsilon > 0$  の時には  $r_0 \rightarrow 0$  で  $r = r_0$  ( $\therefore e, \phi = 0$ )

$\epsilon < 0$  の時には  $r_0 \rightarrow 0$  で  $\phi > r_0$

このことから  $\epsilon > 0$  (即ち  $d > 4$ ) の時には classical (平均場近似) な記述が成立することがわかる。 上のことはもっと一般に証明することもできる。

したがって  $\epsilon > 0$  ( $d > 4$ ) の時には臨界指数は  $n = 0$ ,  $\gamma = 1$  で与えられる。

$\epsilon < 0$  の時には、これに反して、補正項  $\phi$  が  $r_0$  に比べてもっと大きくなる。これを self-consistent にとり扱うにはクリコマれたプロパゲータ  $g^{-1}(k) = (r + Ak^{2-n})$ , ( $r = r_0^{\gamma}$ ) をとりかつ  $U_0$  は一般に  $r$  の巾に依存すると仮定することが必要になる。今座標及びスピン  $\vec{S}(x)$  について同時 scale 変換

$$\begin{cases} \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x} \\ \vec{S} \rightarrow \xi \vec{S} \end{cases}$$

を行った時, ハミルトニアン(7)を不変にするためには

$$U(r) \propto r^{-\frac{\varepsilon-2\eta}{2-\eta}} \text{ であればよいことが示せる。}$$

#### 4) ダイアグラムによる臨界指数の計算

先ずクリコマれた vertex  $U_R(r)$  を次のようなダイアグラムから計算すると

$$U_R(r) = u_0 + (n+8) \frac{U_0^2}{4\pi^2} \left[ \ell n r + \frac{17}{6} - \frac{1}{4} \varepsilon \ell n^2 r - \varepsilon \left( \frac{1}{2} + K' \right) \ell n r \right] \\ + \frac{u_0^3}{16\pi^4} \left[ (n+8)^2 \left( \ell n r + \frac{17}{6} \right)^2 - (20n+88) \ell n r \right] + \quad (13)$$

が得られる。ここで  $K'$  は  $K_{4-\varepsilon} = K_4 (1 - \varepsilon K') + 0 \varepsilon^2$ ,

$$K_d = 2 (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[ \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \right]^{-1}$$

上の式と  $u_0(r) \propto r^{-\frac{\varepsilon-2\eta}{2-\eta}} = \exp\left[\frac{(\varepsilon-2\eta)}{2-\eta} (\ell n r)\right]$  の関係を用いて, さらに

self-energy についての関係式

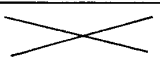
$$r = r_0 + \Phi(r), \quad \Phi(r) = \frac{\text{self-energy diagram}}{u_R(r)}$$

を用いると,  $\gamma, \eta$  は  $\varepsilon$  の巾に展開できて

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)} \varepsilon + \frac{(n+2)(n^2+22n+52)}{4(n+8)^3} \varepsilon^2 + 0 \varepsilon^3 \quad (14)$$

$$\eta = \frac{n+2}{2(n+8)^2} \varepsilon^2 + \frac{(n+2)}{2(n+8)^2} \left\{ \frac{6(3n+14)}{(n+8)^2} - \frac{1}{4} \right\} \varepsilon^3 + 0 \varepsilon^4 \quad (15)$$

が得られる。この  $\varepsilon$  についての二次までの展開を用いて種々の場合に  $\gamma, \eta$  を求めると次の表のようになる。

自由度 n	次元 d	$r$	$r$ (Padé <sub>exact</sub> )	$\eta$	$\eta$ (Padé <sub>exact</sub> )
	4	1	1	0	0
3 Heisenberg スピン	3	1.3465	1.375±0.01	0.0288	?)
	2	1.9314		0.1478	
	(1	2.755	?	0.2261	
2 planar (XY)	3	1.30	4/3=1.333	0.037	?)
	2	1.80	?	0.232	
	(1	2.50		0.693	
1 Ising スピン	3	1.244	1.250±0.063	0.0322	0.056±0.008
	2	1.5418	$\frac{7}{4} = 1.75$	0.2235	$\frac{1}{4} = 0.25$
	(1	2.1944		0.67126	)

表中 ( ) は一般論から相転移の起らないことが結論されるので、臨界指数は意味をもたない。Ising の二次元の場合は Onsager の exact solution による結果と比較した。上の表からわかるように、 $\epsilon$  についての摂動計算で求めた臨界指数は今まで知られている結果と非常によい一致を示している。

上の考察は static なプロパゲータ (熱学的量) に限られているが、ここで展開されたダイアグラムの方法は臨界点附近での動的振舞の記述にも有効であろうと考えられる。

## 文 献

- 1) K.G. Wilson P.R. B4 3184 (1971)
- 2) K.G. Wilson and M.E. Fisher P.R.L. 28 240 (1972)
- 3) K.G. Wilson P.R.L. 28 548 (1972)